TU WIEN FORMATH Forum Mathematik

53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 21. Juni 2022

1. *(BWM 1994, 1. Runde)* Gegeben seien elf reelle Zahlen.

   Man beweise, dass immer mindestens zwei von ihnen Dezimaldarstellungen haben, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

2. *(BWM 1994, 1. Runde)* Anna und Bernd spielen nach fogender Regel: Beide schreiben auf je einen Zettel eine natürliche Zahl und geben ihren Zettel gefaltet dem Schiedsrichter. Dieser schreibt auf eine für Anna und Bernd sichtbare Tafel zwei natürliche Zahlen, von denen die eine beliebig, die andere aber die Summe der Zahlen auf den Zetteln ist. Danach fragt der Schiedsrichter Anna, ob sie die Zahl von Bernd nennen kann. Wenn Anna verneint, richtet er an Bernd die entsprechende Frage. Wenn Bernd verneint, geht die Frage wieder an Anna, usw.

   Es wird vorausgesetzt, dass Anna und Bernd beide intelligent und ehrlich sind. Man beweise, dass nach endlich vielen Fragen die Antwort JA gegeben wird.

3. *(BWM 1990, 1. Runde)* Zwischen zwanzig Städten bestehen 172 direkte Flugverbindungen, die jeweils in beiden Richtungen benutzbar sind. Keine zwei von ihnen verbinden dieselben beiden Städte.

   Man weise nach, dass man von jeder Stadt in jede andere Stadt fliegen kann, ohne dabei mehr als einmal umzusteigen.

4. *(BWM 2014, 1. Runde)* Anja soll 2014 ganze Zahlen an die Tafel schreiben und dabei erreichen, dass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel eine der 2014 Zahlen ist.

   Beweise, dass dies nur gelingt, wenn sie lauter gleiche Zahlen schreibt.

5. *(BWM 2011, 1. Runde)* Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden - irgendwo beginnend - im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, ..., 9$ bzw. 10 Murmln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Murmel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen - wenn sie beide nicht leer sind - je eine Murmel entfernen.

   Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen?