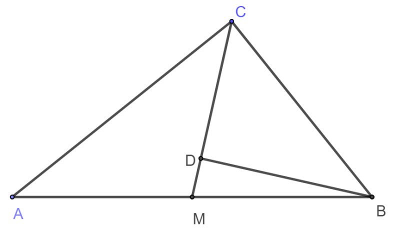
53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 7. Juni 2022

1. Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C. Der Mittelpunkt der Strecke AB sei M und D der Lotfußpunkt von B auf MC. Weiters gilt $\alpha = \angle BAC = 40°$.
   Berechne den Winklel $\angle CBD$.



2. Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden - irgendwo beginnend - im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3 \cdots 9$ bzw. 10 Kugeln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Kugel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen - wenn sie beide nicht leer sind - je eine Murmel entfernen. Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2022 Kugelnn liegen?

3. Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 150. Alice darf in jedem Spielzug zwei Zahlen durch deren Summe ersetzen. Kann sie erreichen, dass am Schluss eine einzige ungerade Zahl auf der Tafel steht?

4. Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b und c folgende Ungleichung gilt:
   $$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{1}{c}$$
   Für welche a, b, c tritt Gleichheit ein?

5. Wie viele dreistellige Zahlen $\overline{abc}$ mit nicht notwendigerweise verschiedenen Ziffern und $a \neq 0$ und $c \neq 0$ gibt es, wenn sowohl $\overline{abc}$ als auch $\overline{cba}$ durch 4 teilbar sein sollen.

6. Bestimme alle reellen Zahlen x für die
   $$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 2022.$$
   ($\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x)

7.

8. Löse in den nichtnegativen ganzen Zahlen die Gleichung
   $$n! + 3 = a^2.$$
   (Hinweis: $0! = 1; 1! = 1$; und für natürliche Zahlen $n > 1$ gilt $n! = (n-1)! \cdot n$)