



53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs

31. Mai 2022

Die folgenden Aufgaben sind vom Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger 2017:
(mittlerweile Junior-Regionalwettbewerb)

1. (*Walther Janous*) Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$.
Man beweise:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

2. (*Erich Windischbacher*) Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ ist D der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Strecke CD . Die Gerade BM schneidet AC in E . Man beweise, dass AC dreimal so lang wie CE ist.
3. (*Richard Henner*) Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind.

Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an. Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste?

4. (*Karl Czakler*) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{17} \right\rfloor$$

über der Menge der positiven ganzen Zahlen?

Dabei bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.