53. Österreichische Mathematik-Olympiade

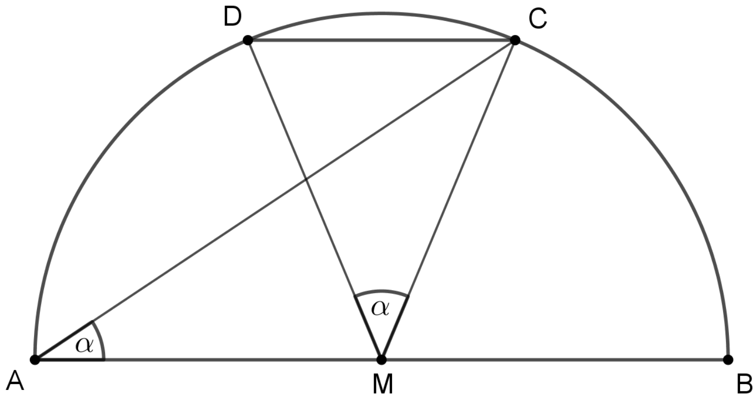
Junior*innen -Kurs 24.Mai 2022

Kurswettbewerb

1. Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b die Ungleichung
$$\frac{a^2+1}{2a} \geq \frac{2b}{b^2+1}$$
gilt. Wann gilt Gleichheit?

2. Gegeben sei ein Halbkreis über den Durchmesser AB mit dem Mittelpunkt M. Die Strecke CD sei eine Sehne parallel zu AB. Es gilt $\angle BAC = \angle CMD = \alpha$.

   Wie groß ist der Winkel α?



3. Ein echter Teiler einer Zahl n ist ein positiver Teiler von n, der weder 1 noch n ist.
   (a) Bestimme alle natürlichen Zahlen, die gleich der Summe ihres größten und ihres kleinsten echten Teilers sind!
   (b) Bestimme alle natürlichen Zahlen, die von der Summe ihres größten und ihres kleinsten echten Teilers geteilt werden!

4. An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Nacheinander wird folgender Schritt wiederholt durchgeführt: Zwei Zahlen an der Tafel werden ausgewählt und durch die Einerziffer ihrer Summe und die Einerziffer ihres Produkts ersetzt.

   Lässt sich durch geschickte Wahl der jeweils zu ersetzenden Zahlen erreichen, dass irgendwann nur noch gerade Zahlen an der Tafel stehen? Wenn ja, beschreibe ein mögliches Vorgehen. Wenn nein, begründe, warum das unmöglich ist.