53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 10. Mai 2022

1. *(Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) 2011, 1. Runde)* Zehn Schalen stehen im Kreis. Sie werden - irgendwo beginnend - im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, ..., 9$ bzw. 10 Murmeln gefüllt. In einem Zug darf man zu zwei benachbarten Schalen je eine Murmel hinzufügen oder aus zwei benachbarten Schalen - wenn sie beide nicht leer sind - je eine Murmel entfernen.

   Kann man erreichen, dass nach endlich vielen Zügen in jeder Schale genau 2011 Murmeln liegen?

2. *(BWM 1991, 1. Runde)* Gegeben sind 1991 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend zehn dieser Zahlen stets größer als 1 ist.

   Man beweise, dass das Produkt aller 1991 Zahlen ebenfalls größer als 1 ist.

3. *(BWM 2005, 1. Runde)* Im Zentrum eines $2005 \times 2005-$Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

   - Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
   - schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Aufgenzahl nach links und
   - schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

   Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen?

4. *(BWM 2006, 1. Runde)* Man finde zwei aufeinander folgende positive ganze Zahlen, deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.

5. *(LWA/JRW 2018, Gerhard Wöginger)* Zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geq 4$ untersuchen wir, ob es eine Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten gibt, die mit den Zahlen $1, 2, ..., 3n$ gefüllt werden kann, sodass

   - sich in jeder Zeile dieselbe Summe z ergibt und
   - sich in jeder Spalte dieselbe Sumem s ergibt.

   Man zeige:

   (a) Wenn n gerade ist, gibt es keine solche Tabelle.

   (b) für $n = 5$ gibt es eine solche Tabelle.

6. *(JRW 2021, Karl Czakler)* Sei p eine Primzahl und seien m und n positive ganze Zahlen mit $p^2 + m^2 = n^2$.

   Man beweise, dass $m > p$ gilt.