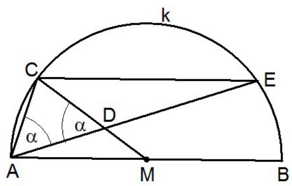
53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 17.Mai 2022

1. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $BC = CD = AD$ und $\angle BAD = \angle CBA = 72°$. Beweise: $AB = AC = BD$.

2. Bestimme alle Primzahlen p, für die $p \cdot (p+6)$ eine Quadratzahl ist.

3. Gegeben sei ein Halbkreis über den Durchmesser AB mit dem Mittelpunkt M und CE sei eine Sehne parallel zu AB. Der Schnittpunkt von CM mit AE sei D und es sei $\angle CAD = \angle ADC = \alpha$. Wie groß ist der Winkel α?



4. Zeige für alle nicht negativen reellen Zahlen a und b mit $b \leq 1$ die Ungleichung:
$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq \sqrt{1-b}$$

5. Beweise, dass die Ungleichung
$$(1+x+y)^2 \geq (2x+1)(2y+1)$$
für alle reellen Zahlen x, y gilt! Wann gilt Gleichheit?

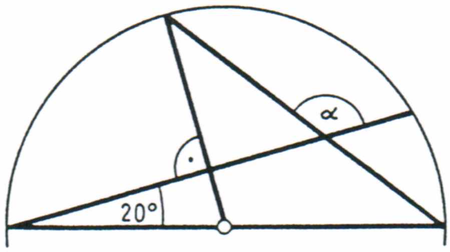
6. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\angle ACB = 90°$ und $\alpha = \angle BAC = 30°$ schneide die Winkelsymmetrale von $\beta = \angle CBA$ die Seite AC im Punkt D.

   Zeige, dass die Strecke AD doppelt so lang wie die Strecke DC ist!

7. Das Dreieck ABC sei spitzwinklig und nicht gleichschenklig. Der Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks sei O, der Umkreis k und H der Höhenschnittpunkt. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden CO mit k sei G.

   Zeige: Das Viereck $ABGH$ ist ein Parallelogramm.

8. Bestimme alle naturlichen Zahlen, die die Gleichung
$$14x + 5y + 2016 = xy$$
erfüllen!



9. Berechne den Winkel α:

10.)Man beweise für alle reellen Zahlen a, b, c die folgende Ungleichung:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 30 > 6b + 8c + 4a$$

11. Löse über der Menge der reellen Zahlen.

$$\left\lfloor \frac{x}{3} + 3 \right\rfloor \geq \frac{x}{4} + 1.$$

($\lfloor x \rfloor$ .. .größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)