53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 3.Mai 2022

1. Es seien x und y positive reelle Zahlen. Beweise:
$$\frac{1}{x+xy}+\frac{1}{y+xy}\geq\frac{4}{x+2xy+y}.$$

2. Man zeige für alle positiven x und y:
$$\frac{(x+y)^2}{16}+1\geq\sqrt{xy}.$$

3. Beweise, dass für alle reellen Zahlen a,b mit $a^2+b^2\neq 0$ folgende Ungleichung gilt:
$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}\leq\frac{4}{|a+b|}$$

4. Der Kreis k_2 berührt den Kreis k_1 von innen im Punkt X. Der Punkt P liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt N_1 ist jener Punkt auf k_1, der P am nächsten liegt, und F_1 ist jener Punkt auf k_1, der von P am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt N_2 jener Punkt auf k_2, der P am nächsten liegt, und F_2 ist jener Punkt auf k_2, der von P am weitesten entfernt ist. Man beweise, dass $\angle N_1XN_2=\angle F_1XF_2$ gilt.

5. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Über der Strecke BC wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck BCS errichtet. Der Halbierungspunkt der Strecke AS sei N und der Halbierungspunkt der Seite CD sei H.

   Beweise: $\angle NHC=60\circ$.

6. Sei a eine reelle Zahl und b eine reelle Zahl mit $b\neq -1$ und $b\neq 0$.. Man bestimme alle Paare (a,b), für die
$$\frac{(1+a)^2}{1+b}\leq 1+\frac{a^2}{b}$$
erfüllt ist. Für welche Paare (a,b) gilt Gleichheit?

7. Wie viele positive fünfstellige ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer fünf Ziffern 900 ist?

8. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Trapez $ABCD$ mit $AB\parallel CD$ und $AB>CD$. Der Lotfußpunkt von D auf AB sei E. Der Halbierungspunkt der Diagonale BD sei M.

   Man beweise, dass EM parallel zu AC§ ist.