## 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 26. April 2022

1. *(Bundeswettbewerb Mathematik 2003 Runde 1)* Gegeben seien sechs aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen. Man beweise, dass es eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.

2. *(104 Number Theory Problems (Andreescu))* Gegeben sei eine streng monoton wachsende Folge von sechs positiven ganzen Zahlen, wobei jede Zahl (ausgenommen die erste) ein Vielfaches der vorangegangenen Zahl ist. Die Summe der sechs Zahlen ist 79. Wie lautet die größte Zahl in der Folge?

3. *(ÖMO Kurswettbewerb Fortgeschrittene 2019)* Für jede natürliche Zahl $n$ sei die Zahl $Z = (n + 2)(n + 0)(n + 1)(n + 9) + 2019$ definiert.

   (a) Zeige, dass $Z$ nie eine Primzahl ist.

   (b) Zeige, dass $Z$ nie eine Quadratzahl ist.

4. *(Walther Janous)* Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Wir betrachten die $n - 1$ Brüche

   $$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}.$$

   Man beweise, dass sich eine gerade Anzahl davon nicht kürzen lässt.

5. *(GWF 2017, Walther Janous)* Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die

   $$n = a^2 + b^2$$

   gilt, wobei $a$ der kleinste von 1 verschiedene Teiler von $n$ und $b$ ein beliebiger Teiler von $n$ ist.

6. *(GWF 2018, Richard Henner)* Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von $n$.

   Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die

   $$d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leq 8$$

   gilt.