53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 15. März 2022

1. *(Gottfried Perz)*
   a) Zeige, dass es vier verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass die Summe von je drei dieser vier Zahlen eine Primzahl ist.

   b) Zeige, dass es keine fünf verschiedenen positiven ganzen Zahlen gibt, sodass die Summe von je drei dieser fünf Zahlen eine Primzahl ist.

2. Zeige: Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele Fibonacci-Zahlen, die durch n teilbar sind.

   Anmerkung: Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch:

   $$F_0 = 0, \;\; F_1 = 1, \;\; \forall n \geq 2: \;\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

3. Finde alle natürlichen Zahlen n, für die gilt:

   $$n! > 3^n$$

4. *(ÖMO Junior-Kurswettbewerb 2018)* Die Zahl 18^{17} soll in der Form $2^a \cdot 3^b \cdot 6^c \cdot 9^d$ mit natürlichen Zahlen a, b, c, d dargestellt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

5. *(ÖMO Junior-Kurswettbewerb 2021)* Unter kleinwüchsigen Zahlen verstehen wir fünfstellige (natürliche) Zahlen, die nur aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4$ bestehen.

   a) Wieviele kleinwüchsige Zahlen gibt es, wenn jede Ziffer genau einmal in jeder Zahl vorkommen soll?

   b) Wieviele kleinwüchsige Zahlen gibt es, die kleiner als 41041 sind, wenn jede Ziffer mehrfach vorkommen darf?

6. Zeige, dass für ganze Zahlen a und b gilt:

   $$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a - b, b) = \mathrm{ggT}(a + b, b)$$

7. *(Südafrika 2004/3. Runde, 15)* Seien $a = 1 \cdots 1$ (40 Ziffern) und $b = 1 \cdots 1$ (12 Ziffern). Bestimme $\mathrm{ggT}(a, b)$.

8. *(Walther Janous)* Seien $k \geq 1$ und $n \geq 2$ zwei ganze Zahlen.

   Man zeige: Der größte gemeinsame Teiler von $n - 1$ und $nk + 1$ teilt die Zahl $k + 1$.