53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 8. März 2022

1. Wie viele Zahlen kann man höchstens aus der Menge $\{1, 2, 3, ..., 2022\}$ auswählen, sodass keine zwei ausgewählten Zahlen die Differenz 3 haben?

2. *(Skriptum "Kombinatorik" von Stephan Wagner, Aufgabe 59 - abgewandelt)*
Eine Schachtel enthält 2010 weiße und 2011 schwarze Kugeln. Zusätzlich haben wir einen unbegrenzten Vorrat an schwarzen Kugeln. Nun wählen wir wiederholt zwei Kugeln aus der Schachtel aus. Wenn sie dieselbe Farbe haben, entfernen wir sie und fügen eine schwarze Kugel zur Schachtel hinzu. Haben sie dagegen verschiedene Farben, so legen wir die weiße Kugel zurück und entfernen die schwarze. Wie müssen wir vorgehen, damit die letzte Kugel weiß ist?

3. Paul spielt eine sehr simple (erfundene) Version des Spiels "Cookie Clicker": Um 30 Kekse kann er eine Hilfskraft kaufen. Diese arbeitet 2 Stunden lang für ihn und produziert alle zwei Minuten einen Keks. Jede Stunde kauft Paul so viele Hilfskräfte, wie er mit seinen Keksen kann. Am Anfang hat er 30 Kekse zur Verfügung. Wie viele Hilfskräfte wird Paul zu Beginn der 15. Stunde kaufen?

4. Anton und Berta spielen ein Spiel auf einem $n \times n-$Schachbrett. Sie starten mit einer Spielfigur im linken oberen Feld und ziehen abwechselnd damit, wobei Anton beginnt. Die erlaubten Züge sind unten angegeben. Wer das rechte untere Feld erreicht, hat gewonnen. Wer hat eine Gewinnstrategie?

   a) Man darf in einem Zug $1, 2$ oder 3 Schritte machen. Jeder Schritt ist entweder ein Feld nach unten oder ein Feld nach rechts.

   b) Man darf in einem Zug beliebig viele Schritte nach unten oder beliebig viele Schritte nach rechts machen.

5. *(GWF 2015, Theresia Eisenkölbl)* Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. In jedem Spielzug wählt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihr arithmetisches Mittel. Dies geschieht so lange, bis nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl, die man durch eine geeignete Folge von Spielzügen am Ende erreichen kann.

6. *(Türme von Hanoi)* Auf einem Brett gibt es drei Stäbe, die zum Aufstecken kreisförmiger Scheiben dienen. In der Ausgangslage sind n Scheiben am ersten Stab aufgesteckt, deren Größe nach oben strikt abnimmt. Es darf immer nur eine Scheibe, die als oberste auf einem Stab steckt, als oberste auf einen anderen Stab gesteckt werden und es dürfen immer nur kleinere Scheiben auf größeren Scheiben liegen.

   Die Scheiben sollen auf den dritten Stab umgeschlichtet werden, sodass sie dort wieder in der gleichen Anordnung wie am Anfang auf dem ersten Stab liegen. Wie viele Verlegungen einzelner Scheiben sind dazu mindestens nötig?

7. *(Birgit Vera Schmidt)* Ein Labyrinth besteht aus n Räumen, die mit Einbahnstraßen miteinander verbunden sind. Jeder Raum hat mindestens einen Ausgang. Man zeige, dass das Labyrinth mindestens einen Rundweg enthält (d.h. einen Weg, der bei einem bestimmten Raum beginnt und über endlich viele Einbahnstraßen wieder zu diesem Raum zurückführt).

Ausgewählte Lösungen

1. Antwort: Man kann höchstens die Hälfte aller Zahlen, also 1011 Zahlen, auswählen.

   Wir teilen die Zahlen in Sechsergruppen ein: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, usw. Da 2022 durch 6 teilbar ist, geht sich das genau aus.

   Aus jeder Sechsergruppe können offensichtlich nur 3 Zahlen ausgewählt werden: Etwa kann in der ersten Gruppe nur entweder 1 oder 4 genommen werden, da diese Differenz 3 haben, genauso nur entweder 2 oder 5 und entweder 3 oder 6. Also können insgesamt höchstens die Hälfte aller Zahlen genommen werden.

   Wir müssen noch zeigen, dass es tatsächlich möglich ist, die Hälfte aller Zahlen zu nehmen: Dazu wählen wir in jeder Sechsergruppe die ersten drei Zahlen aus. In der entstehenden Menge $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, ...\}$ haben keine zwei Zahlen Differenz 3. Also ist die Antwort tatsächlich 1011.

2. Es ist unmöglich, dass am Ende eine weiße Kugel übrig bleibt.

   Wir betrachten nur die Anzahl der weißen Kugeln. Diese wird in einem Zug entweder um 2 kleiner (wenn wir zwei weiße Kugeln aus der Schachtel nehmen) oder bleibt gleich (wenn wir zwei schwarze Kugeln oder zwei verschiedenfarbige Kugeln aus der Schachtel nehmen). Da die Anzahl weißer Kugeln am Anfang gerade ist und immer nur um 2 weniger wird oder gleich bleibt, bleibt sie also immer gerade. Insbesondere kann die Anzahl weißer Kugeln nie 1 sein, und somit kann die letzte Kugel nicht weiß sein.

3.

4.

5. *(Gerhard Kirchner)* Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt:

   - Alle Zahlen auf der Tafel sind ≥ 1.
   - Mindestens eine Zahl auf der Tafel ist größer als 1.

   Insbesondere kann die letzte Zahl auf der Tafel nicht 1 (oder noch kleiner) sein. Wir behaupten, dass durch eine geeignete Folge von Spielzügen stets die Zahl 2 erreicht werden kann.

   Als ersten Schritt bilden wir das Mittel der beiden Zahlen $n - 2$ und n. Somit stehen auf der Tafel die Zahlen $1, 2, ..., n - 3, n - 1, n - 1$.

   Als zweiten Schritt bilden wir das Mittel der beiden Zahlen $n - 1$ und $n - 1$. Somit stehen auf der Tafel die Zahlen $1, 2, ..., n - 3, n - 1$.

   Es genügt also zu zeigen, dass sich das Ergebnis 2 erreichen lässt, wenn die Zahlen $1, 2, ..., n - 3, n - 1$ auf der Tafel stehen. Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über n. Beim Induktionsanfang $n = 3$ ist nichts zu zeigen, denn es steht schon die Zahl 2 allein an der Tafel.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, es sei schon gezeigt, dass das Ergebnis 2 aus den Zahlen $1, 2, ..., n-3, n-1$ erreichbar ist. Wenn nun die Zahlen $1, 2, ..., n-2, n$ an der Tafel stehen, so bilden wir das arithmetische Mittel von $n-2$ und n. Somit stehen die Zahlen $1, 2, ..., n-3, n-1$ auf der Tafel und die Behauptung (für $n+1$ statt n) folgt aus der Induktionsannahme.

6. Man braucht mindestens $2^n - 1$ Verlegungen.

   Wir beweisen das mittels vollständiger Induktion:

   Induktionsanfang: Für $n = 1$ braucht man nur eine Verlegung, und es gilt tatsächlich $2^1 - 1 = 1$.

   Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass man für n Scheiben mindestens $2^n - 1$ Verlegungen benötigt. Wir wollen jetzt zeigen, dass man dann für $n+1$ Scheiben mindestens $2^{n+1} - 1$ Verlegungen benötigt.

   Irgendwann muss die größte Scheibe vom ersten auf den dritten Stab gelegt werden. Um diesen Zug ausführen zu können, müssen alle restlichen Scheiben auf dem zweiten Stab liegen - natürlich ich der richtigen Reihenfolge. Man muss diese n Scheiben also zuerst auf den zweiten Stab schlichten, was laut Induktionsannahme mindestens $2^n - 1$ Verlegungen benötigt (dass die größte Scheibe dabei ganz unten auf dem ersten Stab liegt, ist ja egal, und das man zum zweiten statt zum dritten Stab verlegt ist auch egal). Dann kann man mit einer Verlegung die größte Scheibe vom ersten auf den dritten Stab legen. Danach muss man die restlichen Scheiben vom zweiten auf den dritten Stab verlegen, was wieder laut Induktionsannahme mindestens $2^n - 1$ Verlegungen benötigt.

   Somit braucht man tatsächlich mindestens $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ Verlegungen und mit diesem System erreicht man auch tatsächlich diese Mindestanzahl.

7. *(Birgit Vera Schmidt)* Eine Ratte beginnt in einem beliebigen Raum, und geht in jedem Schritt über eine legale Einbahnstraße in den nächsten Raum. Da es in jedem Raum einen Ausgang gibt, kann die Ratte unendlich viele Schritte machen (falls sie nicht vorher verhungert). Innerhalb der ersten $n+1$ Schritte betritt sie daher mindestens einen der n Räume doppelt. Der zurückgelegte Weg zwischen dem ersten und dem zweiten Betreten des Raumes ist ein solcher Rundweg.