53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 8. März 2022

1. Wie viele Zahlen kann man höchstens aus der Menge $\{1, 2, 3, ..., 2022\}$ auswählen, sodass keine zwei ausgewählten Zahlen die Differenz 3 haben?

2. *(Skriptum "Kombinatorik" von Stephan Wagner, Aufgabe 59 - abgewandelt)*
Eine Schachtel enthält 2010 weiße und 2011 schwarze Kugeln. Zusätzlich haben wir einen unbegrenzten Vorrat an schwarzen Kugeln. Nun wählen wir wiederholt zwei Kugeln aus der Schachtel aus. Wenn sie dieselbe Farbe haben, entfernen wir sie und fügen eine schwarze Kugel zur Schachtel hinzu. Haben sie dagegen verschiedene Farben, so legen wir die weiße Kugel zurück und entfernen die schwarze. Wie müssen wir vorgehen, damit die letzte Kugel weiß ist?

3. Paul spielt eine sehr simple (erfundene) Version des Spiels "Cookie Clicker": Um 30 Kekse kann er eine Hilfskraft kaufen. Diese arbeitet 2 Stunden lang für ihn und produziert alle zwei Minuten einen Keks. Jede Stunde kauft Paul so viele Hilfskräfte, wie er mit seinen Keksen kann. Am Anfang hat er 30 Kekse zur Verfügung. Wie viele Hilfskräfte wird Paul zu Beginn der 15. Stunde kaufen?

4. Anton und Berta spielen ein Spiel auf einem $n \times n-$Schachbrett. Sie starten mit einer Spielfigur im linken oberen Feld und ziehen abwechselnd damit, wobei Anton beginnt. Die erlaubten Züge sind unten angegeben. Wer das rechte untere Feld erreicht, hat gewonnen. Wer hat eine Gewinnstrategie?

   a) Man darf in einem Zug $1, 2$ oder 3 Schritte machen. Jeder Schritt ist entweder ein Feld nach unten oder ein Feld nach rechts.

   b) Man darf in einem Zug beliebig viele Schritte nach unten oder beliebig viele Schritte nach rechts machen.

5. *(GWF 2015, Theresia Eisenkölbl)* Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. In jedem Spielzug wählt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihr arithmetisches Mittel. Dies geschieht so lange, bis nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl, die man durch eine geeignete Folge von Spielzügen am Ende erreichen kann.

6. *(Türme von Hanoi)* Auf einem Brett gibt es drei Stäbe, die zum Aufstecken kreisförmiger Scheiben dienen. In der Ausgangslage sind n Scheiben am ersten Stab aufgesteckt, deren Größe nach oben strikt abnimmt. Es darf immer nur eine Scheibe, die als oberste auf einem Stab steckt, als oberste auf einen anderen Stab gesteckt werden und es dürfen immer nur kleinere Scheiben auf größeren Scheiben liegen.

   Die Scheiben sollen auf den dritten Stab umgeschlichtet werden, sodass sie dort wieder in der gleichen Anordnung wie am Anfang auf dem ersten Stab liegen. Wie viele Verlegungen einzelner Scheiben sind dazu mindestens nötig?

7. *(Birgit Vera Schmidt)* Ein Labyrinth besteht aus n Räumen, die mit Einbahnstraßen miteinander verbunden sind. Jeder Raum hat mindestens einen Ausgang. Man zeige, dass das Labyrinth mindestens einen Rundweg enthält (d.h. einen Weg, der bei einem bestimmten Raum beginnt und über endlich viele Einbahnstraßen wieder zu diesem Raum zurückführt).