53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 15. Februar 2022

Theorie: Modulo-Rechnen

Eine kurze Erinnerung, wie Modulo-Rechnen funktioniert, aus dem Skriptum “Zahlentheorie für den Junior-Regionalwettbewerb der Österreichischen Mathematik-Olympiade” von Clemens Heuberger (https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/93, Seite 6):

Für eine natürliche Zahl a und eine positive ganze Zahl m sagen wir, a lässt Rest r bei Division durch m, wenn $r \in \{0, \dots, m-1\}$ und es eine ganze Zahl q mit $a = qm + r$ gibt. Das ist genau der Rest, der bei der „üblichen“ Division von a durch m herauskommt.

Definition 5.1. Seien a, b natürliche Zahlen und $m \geq 2$ eine ganze Zahl. Dann heißen a und b *kongruent modulo* m, wenn sie bei Division durch m den gleichen Rest lassen. Wir schreiben in diesem Fall $a \equiv b \pmod{m}$.

So gilt zum Beispiel $17 \equiv 42 \pmod{5}$, weil beide den Rest 2 bei Division durch 5 lassen: $17 = 3 \cdot 5 + 2$ und $42 = 8 \cdot 5 + 2$. Ebenso erhält man

$$2 \equiv 7 \pmod{5}, 7 \equiv 12 \pmod{5}, 12 \equiv 17 \pmod{5}, \dots$$

Satz 5.3. *Seien a, b und m positive*[6] *ganze Zahlen. Dann gilt $a \equiv b \pmod{m}$ genau dann, wenn $m \mid (a-b)$.*

Mit Kongruenzen darf man rechnen: Man kann in Additionen, Subtraktion und Multiplikationen jederzeit eine Zahl durch eine kongruente Zahl ersetzen. In einer Potenz a^b darf man aber nur die Basis a, nicht die Hochzahl b ersetzen, und Divisionen beim Modulo-Rechnen sind überhaupt nur in Ausnahmefällen erlaubt.

Aufgaben

Die Aufgaben, bei denen "Skriptum" steht, stammen aus dem Skriptum "Zahlentheorie" von Erich Windischbacher, erweitert und überarbeitet von Ralf Roupec. Die Zahl gibt dabei immer die Aufgabennummer an.

1. *(Skriptum, 23)* Zeige, dass die Zahl $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist.
2. *(Skriptum, 40)* Zeige: $158^n - 28^n - 4^n + 17^n$ ist durch 143 teilbar.
3. *(Skriptum, 34)* Zeige, dass $n^3 + 11n$ für jede natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist.
4. *(Skriptum, 35)* Beweise, dass $n^3 + 3n^2 - n - 3$ für jedes ungerade n durch 48 teilbar ist.
5. In welchen Restklassen kann eine Quadratzahl modulo 3 sein?
6. *(Skriptum, 26)* Zeige, dass $z = 12^{512} - 1$ durch 4147 teilbar ist.
7. *(LWA 2010, Birgit Vera Schmidt)* Man zeige, dass 2010 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann.
8. Beweise die Teilbarkeitsregeln für 9 und 11.
9. *(Skriptum, 32)* Beweise, dass $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist.
10. *(LWA 2015, Karl Czakler)* Es seien a, b und c ganze Zahlen, für die die Summe $a^3+b^3+c^3$ durch 18 teilbar ist.

    Man beweise, dass das Produkt abc durch 6 teilbar ist.
11. *(ÖMO KWB Fortgeschrittene 2021)* Die folgenden Fragen beziehen sich auf den Term $m = 4a^3 + a^2 + 2a + 3$.

    1. Für welche Primzahlen a ist m ebenfalls Primzahl?
    2. Für welche ganzen Zahlen a ist m Quadratzahl?
12. *(Richard Henner)* In der Zahl 7^{2018} wird wiederholt die erste Ziffer gestrichen und zur restlichen Zahl hinzu addiert, bis nur noch eine zehnstellige Zahl übrig bleibt. Zeige: In dieser Zahl kommt eine Ziffer doppelt vor.

    Hinweis: mod 3