



## 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior\*innen -Kurs

25. Jänner 2022

1. Auf der MOL-Straße stehen  $n$  Häuser mit den Hausnummern 1 bis  $n$ , wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist. Die Häuser mit den ungeraden Hausnummern stehen dabei auf der linken Straßenseite, die Häuser mit den geraden Hausnummern auf der rechten. Ein besonders sportlicher Postbote soll jedem Haus eine Zeitung vorbeibringen und möchte dabei nach jeder abgegebenen Zeitung die Straßenseite wechseln. Unter wie vielen Möglichkeiten kann er seine Zustellungsroute auswählen?
2. Ein Grashüpfer kann sich auf einem Koordinatengitter nach den folgenden Regeln bewegen: Vom Punkt mit den Koordinaten  $(x, y)$  darf er nur zu einem Punkt mit diesen Koordinaten springen:  
 $(y, x), (x, -2y), (-2x, y), (x + 1, y + 2)$  oder  $(x - 1, y - 2)$ .  
Der Grashüpfer startet im Punkt  $(1, 0)$ .
  - a) Gib eine Möglichkeit an, wie er durch erlaubte Sprünge den Punkt  $(2, 8)$  erreichen kann.
  - b) Zeige, dass er niemals den Punkt  $(0, 0)$  erreichen kann.
  - c) Gib die (ganzzahligen) Koordinaten zweier weiterer Punkte an, die er nie erreichen kann.
3. (*Richard Henner*) Auf dem Umfang eines Kreises sind  $n$  Punkte markiert. Auf jedem Punkt liegt ein Stein. In einem Zug werden zwei beliebige Steine in entgegengesetzte Richtung um einen Punkt verschoben. Am Ende sollen alle Steine auf einem Punkt liegen. Ist das möglich?
4. Benjamin hat  $n$  Klötze mit den Höhen 1 bis  $n$  und möchte diese so nebeneinander aufstellen, dass sich seine Katze Moritz von links nach rechts über sie hinwegbewegen kann. Auf Grund seines fortgeschrittenen Alters kann Moritz dabei jeweils nur auf den nächsten Klotz springen, falls dieser tiefer oder um 1 höher ist. Zu Beginn wird Moritz auf den Klotz am linken Ende gesetzt.

*Anmerkung:* Für  $n = 5$  ist etwa:  $3 - 4 - 5 - 1 - 2$  eine Möglichkeit,  $1 - 3 - 4 - 5 - 2$  jedoch nicht.

Wie viele Möglichkeiten hat Benjamin, die Klötze aufzustellen?
5. (*Gottfried Perz, Raach 2002*) Auf ein  $8 \times 8$ -Schachbrett werden 33 Türme gestellt. Man zeige, dass man 28 davon entfernen kann, sodass die restlichen fünf einander nicht bedrohen.