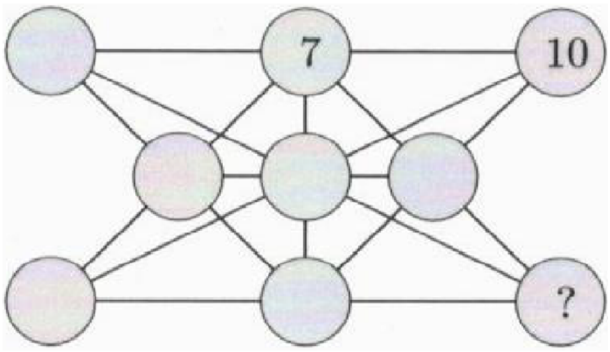
53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 5.April 2022

1. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Es sei E ein Punkt auf AD und F ein Punkt auf BC mit $BE = EF = DF = 30$. Berechne den Flächeninhalt des Quadrats.

2. Setze in jedes der neun Felder eine natürliche Zahl so ein, dass die Summe der Zahlen entlang einer Linie immer gleich groß ist. In zwei Feldern ist bereits eine Zahl eingetragen. Wie heißt die Zahl im Fel d mit dem Fragezeichen?



3. Sei m eine positive ganze Zahl und p eine Primzahl. Bestimme alle Paare (m, p) für die $p^2 + 144 = m^2$ gilt.

4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt M liegt auf BC und N auf DC und Der Winkel $\angle MAN = 45^0$. Beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AMN auf der Diagonale AC liegt.

5. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit $AC = BC$ und $\angle ACB = \gamma = 45^0$. Beweise, dass die Parallele zu BC durch den Umkreismittelpunkt die Fläche des Dreiecks halbiert.

6. Man zeige: In einem Trapez, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen, gilt immer $(a + c)^2 = e^2 + f^2$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten des Trapezes und e und f die Diagonalen sind.

7. Man beweise, dass für alle rellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq 1 - 1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$