# 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 22.März 2022

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Man berechne die Summe
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

2. Man beweise:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

3. Man beweise:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Man leite eine Formel für die Summe
$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$$
her und beweise sie mit vollständiger Induktion.

5. Man beweise für alle $n>5$ die Ungleichung
$$2^n > n^2.$$

6. Man beweise für alle $a>-1$ und $a\neq 0$ für alle $n>1$ die Ungleichung:
$$(1+a)^n > 1+an$$

7. Man zeige: Für alle positiven natürlichen Zahlen $n$ gilt:
$$3(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdots n!) \geq (n!)^2.$$

8. Man bestimme alle reellen Zahlen $x$, so dass
$$\frac{19x+16}{10} = \left\lfloor \frac{4x+7}{3} \right\rfloor.$$

9. Eine Zahl besteht aus sieben verschiedenen Ziffern und ist durch jede dieser Ziffer teilbar. Welche drei Ziffern kann diese Zahl nicht enthalten?