53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 1.März 2022

Gaußklammer -Funktion, floor-function
Unter $\lfloor x \rfloor$ versteht man die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
Es seien x und y reelle Zahlen, dann gilt:

- $$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
- $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$
- $$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1.$$
- $$\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + m \qquad \text{wenn m eine ganze Zahl ist}$$
- $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

1. a) Man bestimme alle ganzen Zahlen x, für die gilt:
$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{18} \right\rfloor = 3$$
b) Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x gibt, für die gilt:
$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{18} \right\rfloor = 18$$
2. Bestimme alle positiven reellen Zahlen für die die folgende Gleichung gilt:
$$7\lfloor x \rfloor - 5x = 40.$$
3. Man zeige es gibt keine positive rationale Zahl mit
$$x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{9}{2}.$$
4. Für welche Werte von a hat die Ungleichung $x(2a-4) > a(4x+2)$ positive Lösungen?

5. Man beweise für alle reellen positiven Zahlen die Ungleichung

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4.$$

Wann gilt Gleichheit?