53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 22. Februar 2022

1. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:
$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

2. Man zeige für reelle $a; b; c$ mit $a^2 + 2bc = 1$:
$$1 \leq (a^2 + 2b^2)(a^2 + 2c^2)$$

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.

4. Man zeige: Wenn man die Seitenmittelpunkte eines konvexen Vierecks verbindet, entsteht ein Parallelogramm. (Dieses wird auch Varignon Parallelogramm genannt.) Man zeige weiters, dass dieses Parallelogramm genau die Hälfte der Fläche des Vierecks bedeckt.

5. In einer Ebene liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb verlaufende Gerade g. Seien A', B', C' und D' die Fußpunkte der Höhen von A, B, C und D auf g. Man zeige:
$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$
.

6. Man zeige, dass für alle reellen Zahlen a, b folgende Ungleichung gilt:
$$a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$$

7. Man beweise, dass für alle rellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq 1 - 1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:
$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

8. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Der Lotfußpunkt von D auf AB sei E. Der Halbierungspunkt der Diagonale BD sei M. Man beweise, dass EM parallel zu AC ist.

9. Beweise für alle reellen Zahlen a, b mit $0 < a, b < 1$ die Ungleichung
$$a + b^2 < ab + 1.$$