

53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs

1. Februar 2022

1. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $\angle BAC = 60^\circ$. Der Punkt P liege im Inneren des Dreiecks und auf dem Halbkreis über der Seite BC . Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC , AC und AB seien D , E und F .

Man beweise: $\angle EDF = 30^\circ$.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Der Mittelpunkt der Seite AB sei M . Der Punkt D sei der Fußpunkt der Höhe durch A und E Fußpunkt der Höhe durch B .

Man beweise, dass das Dreieck DME gleichschenkelig ist!

3. Es seien x, y reelle Zahlen mit $x^2 + y^2 = 2$. Beweise:

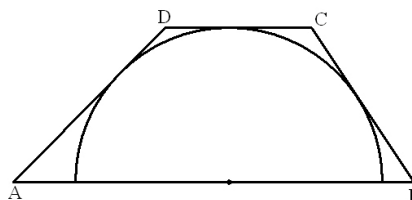
$$(x + y - 1)^2 \geq xy.$$

Wann gilt Gleichheit?

4. In einem Trapez $ABCD$ mit AB parallel zu CD , sind drei Seiten gleich lang; die vierte Seite hat die doppelte Länge.

Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen?

5. Auf der Basis AB eines Trapezes $ABCD$ liegt der Mittelpunkt eines Halbkreises, der die drei anderen Seiten berührt. Wie lang ist die Seite BC , wenn $AB = 14$ und $AD = 8$ ist?



6. Gegeben ist die Menge A der natürlichen Zahlen von 1 bis 15. Kann man zwei Zahlen aus A so auswählen, dass ihr Produkt gleich der Summe der restlichen dreizehn Zahlen von A ist?

7. Man beweise, dass in jedem Parallelogramm

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

gilt.