# 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 17.Jänner 2022

**Quadratische Gleichungen:**

Die kleine und große Lösungsformel :

$$x^2 + px + q = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Der Satz von VIETA:

Seien $x_1$ und $x_2$ reelle Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

1. Löse die Gleichung $x^2 + ax + 9 = 0$ für $a = 2$ bzw. $a = 6$ bzw. $a = 10$!

2. Beweise: Wenn $a, b, c$ die Seiten eines Deiecks sind, dann hat die Gleichung $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ keine reellen Lösungen.

3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + px + p - 3 = 0$ Welche Zahl muss für p eingesetzt werden, damit die Summe der Quadrate der Lösungen den kleinsten Wert annimmt?

4. Für welche ganzen Zahlen $a$ haben beide quadratischen Gleichungen

$$x^2 + 6x + a = 0 \quad \text{und} \quad (a - 20)x^2 + 2ax + (a - 30) = 0$$

keine reellen Lösungen?

5. Löse die Gleichung $((x^2 - 5)^2 - 5)^2 = 121$.

6. Für welche Werte von a hat die Gleichung $a(x^2 + x - 1) = x + 2$ genau eine Lösung für x?

7. Beweise. dass für alle positiven reellen Zahlen gilt:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + 4b}$$

8. Beginnend mit 1 werden alle natürlichen Zahlen addiert, bis man eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern erhält. Wie viele Zahlen muss man addieren?