# 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 21.Dezember 2021

1. Es sei $ABC$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen $CA$ seines Umkreises, der $B$ nicht enthält, liege ein Punkt $P$. Der Fußpunkt der Normalen durch $C$ auf die Gerade $AP$ werde mit $E$ bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch $C$ auf die Gerade $BP$ werde mit $F$ bezeichnet. Man beweise, dass die Strecken $AE$ und $BF$ gleich lang sind.

2. Es seien $a$ ,$b$ positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise:
$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

3. Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen $a$ und $b$ mit $a + b = 1$. Man beweise:
$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \leq 1$$
Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

4. Gegeben sei ein Dreieck $ABC$ mit $AB > AC$ und dem Umkreismittelpunkt $O$. Es sei $D$ ei Punkt auf der Seite $BC$ und $E$ der Fußpunkt des Lotes von $D$ auf $AB$. Der Schnittpunkt der Geraden $AO$ mit $DE$ sei $P$.

   Beweise, dass die Punkte $A$, $P$, $D$ und $C$ auf einem Kreis liegen.

5. Gegeben sei ein Dreieck $ABC$ mit dem Umkreis $k$ mit dem Mittelpunkt $O$. Die Gerade durch den Eckpunkt $B$ normal zur Seite $AC$ schneidet $AC$ in $E$ und $k$ in $D$ (verschieden von $B$). Der Lotfußpunkt des Lotes von $D$ auf $BC$ sei $F$. Beweise, das $EF$ normal auf $BO$ steht.

6. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl $C$, sodass
$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq C$$
unabhängig von $a$ und $b$ erfüllt ist.

7. Es seien $x, y$ reelle Zahlen mit $x + y \neq 0$. Beweise:
$$x^2 + y^2 + \frac{8}{(x+y)^2} \geq 4$$
.