53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 16. November 2021

1. Anna und Bob spielen ein Spiel auf einem Schachbrett aus $n \times n$ Feldern, wobei n ungerade ist. Zuerst wählt Anna ein Feld des Schachbretts aus und streicht es durch. Dann versucht Bob, die restlichen Felder mit Dominosteinen zu überdecken. Ein Dominostein bedeckt immer genau zwei benachbarte Felder des Schachbretts und darf mit keinem anderen Dominostein überlappen. Bob gewinnt, falls ihm das gelingt, ansonsten gewinnt Anna.
   Wer hat eine Gewinnstrategie?

2. In der Ebene liegen endlich viele Geraden, die die Ebene in Gebiete teilen. Jedes Gebiet soll rot oder blau gefärbt werden. Zeige: Man kann die Gebiete so färben, dass zwei benachbarte Gebiete (Gebiete mit einer gemeinsamen Grenze) immer verschiedene Farben haben.

3. *(RWF 2021, Karl Czakler)* Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2020$ und 2021. Man führt folgende Operation aus:
   Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.
   Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.
   (a) Man zeige, dass 2021 als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.
   (b) Man zeige, dass 2020 nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

4. M sei eine Menge von mindestens 2021 ganzen Zahlen, für die gilt:
   $$(a \in M \wedge b \in M) \Rightarrow ((a - b) \in M \vee (b - a) \in M)$$
   (Das bedeutet: Wenn a und b in M sind, dann ist mindestens eines von $a - b$ und $b - a$ auch in M.)
   Zeige: M enthält eine durch 10 teilbare Zahl.

5. In einer kreisrunden Halle mit einem Durchmesser von 88 Metern und einer kreisrunden Säule mit einem Durchmesser von 6 Metern genau in der Mitte befinden sich 2022 Personen. Sie sollen sich so in der Halle verteilen, dass zwischen je zwei Personen immer mindestens 2 Meter Abstand ist. Beweise, dass das nicht möglich ist.