53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 9.November 2021

Die Mittelungleichungen für zwei Variable: Es seien x_1, x_2 positive reelle Zahlen. Es gilt:

$$max(x_1, x_2) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq min(x_1, x_2)$$

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Quadratisches Mittel$\geq$ Arithmetisches Mittel $\geq$

Geometrisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel

Gleichheit für $x_1 = x_2$.

1. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$
gilt, und gib an wann Gleicheit eintritt.

2. Es seien a, b positive reelle Zahlen. Man beweise, dass
$$2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$$
gilt und gib an wann Gleichheit eintritt.

3. Man zeige für alle positiven reellen Zahlen x, y:
$$\frac{x^2}{y} + x + y \geq 3x$$

4. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Man beweise:
$$\frac{(3x - 1)^2}{x} + \frac{(3y - 1)^2}{y} \geq 1.$$
Wann gilt Gleichheit?

5. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass
$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$
gilt, und gib an wann Gleichheit eintritt.

6. Es sei ABC ein spitzwinkelige Dreieck, in dem sich die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BAC$, die Höhe durch B und die Symmetrale der Seite AB in einem Punkt schneiden. Man bestimme die Größe des Winkels $\alpha = \angle BAC$.

7. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Beweise:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{y}\right)^2 \geq 18$$

8. Im Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelsymmetralen von $\angle BAC$. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC falle mit dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks ADC zusammen.

   Man finde die Winkel des Dreiecks ABC.

9. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Punkt D liegt auf BC und teilt die Seite im Verhältnis $BD : DC = 1 : 2$. Weiters kennt man die Winkel $\angle CBA = 45°$ und $\angle CDA = 60°$.

   Man bestimme den Winkel $\angle ACB$.

10. In einem konvexen Viereck $ABCD$ gibt es einen Punkt P mit folgenden Eigenschaften: P ist der Inkreismittelpunkt von ABC und der Umkreismittlpunkt von CDA.

    Beweise, dass der Winkel $\angle ADC$ stumpf ist.

11. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$. Man beweise, dass $x + y \geq 2$

12. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

13. Löse folgende Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$\frac{|x^2 - 4|}{x+2} \geq x$$