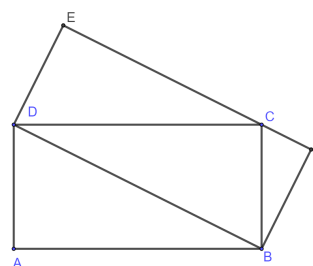


## 53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior\*innen -Kurs

23. November 2021

- Das Rechteck  $ABCD$  hat die Seitenlängen  $AB = CD = 8\text{cm}$  und  $AD = BC = 6\text{cm}$ . Berechne den Flächeninhalt des über der Diagonalen  $BD$  errichteten Rechtecks  $BDFE$ , dessen Seite  $EF$  durch den Eckpunkt  $C$  des ursprünglichen Rechtecks geht.



- Eine Innenwinkelsymmetrale eines Dreiecks schließt mit der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks zwei Winkel ein. Zeige: Die Differenz dieser beiden Winkel ist gleich der Differenz der anliegenden Winkel dieser Seite.
- Zeige: Der Winkel zwischen dem Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks in einem Eckpunkt und der Höhe durch diesen Eckpunkt ist gleich der Differenz der beiden anderen Dreieckswinkel.
- Es sei  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $\angle BAC = 120^\circ$ . Die Basis  $AB$  wird in drei gleiche Teile  $AD = DE = EB$  geteilt. Zeige: Das Dreieck  $DCE$  ist gleichseitig.
- Im Dreieck  $ABC$  sei  $D$  der Schnittpunkt von  $BC$  mit der Winkelsymmetralen von  $\angle BAC$ . Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$  falle mit dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ADC$  zusammen.  
Man finde die Winkel des Dreiecks  $ABC$ .
- Zeige, dass für alle positiven reellen  $a$  und  $b$  folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b}$$

- Zeige, dass für alle reellen  $x$  die Ungleichung

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

- Für welche positiven reellen  $a$  ist die Ungleichung

$$\frac{ax-2}{a} \leq \frac{a}{4}$$

für alle reellen  $x$  erfüllt?