53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 19. Oktober 2021

1. a) Bestimme die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen: $52, 53, 2021, 2022, 32000$

   b) Bestimme alle Teiler dieser Zahlen.

2. Erinnere dich an Teilbarkeitsregeln, die du kennst (z.B.: Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer gerade ist). Versuche zu erklären, wieso diese Teilbarkeitsregeln funktionieren.

3. Beweise: Ist eine positive ganze Zahl z durch 99 teilbar, so ist ihre Ziffernsumme nicht kleiner als 18.
   (Skriptum “Zahlentheorie” von Erich Windischbacher und Ralf Roupec)

4. a) Finde alle Zahlen, die gleich dem Produkt ihrer Ziffern sind.

   b) Finde alle Zahlen, die das Quadrat ihrer eigenen letzten beiden Stellen sind (also das Quadrat der Zahl, die man aus ihrer Zehner- und Einerstelle bildet).

5. a) Zeige: Wenn n^2 durch 2 teilbar ist, dann ist auch n durch 2 teilbar. Wenn n^2 durch 6 teilbar ist, dann ist auch n durch 6 teilbar.

   b) Mit welchen anderen Zahlen außer 2 und 6 funktioniert das?

6. a) Anna und Bernd backen gemeinsam Kekse. Anna braucht 12 Minuten, um eine Portion ihrer Kekse zu backen. Bernd braucht 15 Minuten, um eine Portion seiner Kekse zu backen. Jedesmal, wenn einer der beiden mit einer Portion Kekse fertig ist, aber der andere noch beim Backen ist, fängt er eine neue Portion Kekse an. Nur wenn sie beide gleichzeitig mit einer Portion fertig sind, hören sie auf. Wie lange werden die beiden backen?

   b) Anna braucht bei ihren Keksen 32g Mehl, Bernd braucht 56g Mehl. Sie haben eine Balkenwaage, mit der sie das Gewicht auf das Gramm genau abwiegen können. Doch das es sehr mühsam ist, das Gewicht auf der Balkenwaage zu ändern, wollen sie die Balkenwaage auf ein fixes Gewicht einstellen. Auf welches Gewicht sollten sie die Waage einstellen, damit sie die nötigen Mengen möglichst effizient abwiegen können?

7. Zeige, dass für beliebige natürliche Zahlen a und b das folgende gilt:

   a) $a|b \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(a,b) = a \Leftrightarrow \mathrm{kgV}(a,b) = b$

   b) $\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b$

8. In einem von Hogwarts geheimen Sälen befinden sich 100 durchnummerierte Truhen, die bei Tags verschlossen sind. Jede Nacht treiben dort 100 nacheinander erscheinende Kobolde wie folgt ihr Unwesen:
   Der erste Kobold öffnet alle Truhen. Der zweite Kobold verschließt jede zweite Truhe wieder, also alle Truhen mit den Nummern $2, 4, ..., 100$. Der dritte Kobold ändert den Schließzustand von allen Truhen, deren Nummer durch 3 teilbar sind, usw.
   Der k-te Kobold ändert also den Schließzustand von allen Truhen, deren Nummer durch k teilbar sind. Der letzte Kobold verändert schließlich nur mehr den Schließzustand der letzten Truhe.
   Welche und wie viele Truhen muss der Hausmeister Argus Filch jeden Morgen wieder verschließen?
   (Skriptum "Zahlentheorie" von Erich Windischbacher und Ralf Roupec)