53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 5.Oktober 2021

1. Bestimme alle reellen x für die

   (a)
   $$\frac{4}{x-2} > 1$$

   (b)
   $$|4x-8| \geq 2x$$

   (c)
   $$(x-2)(x+3) \geq 0$$

   (d)
   $$\frac{x+4}{x+1} \leq x$$

   (e)
   $$\sqrt{20-4x} < x-2$$

2. Beweise, dass die Ungleichungen

   $$4x^2 + 20x + 30 > 0 \quad \text{und} \quad 4x^2 + 2 \geq 4x$$

   für alle reellen Zahlen x gelten.

3. Beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b folgende Ungleichungen gelten und überlege wann Gleichheit eintritt.

   (a)
   $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

   (b)
   $$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

   (c)
   $$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \geq ab + 1$$

   (d)
   $$(2a+1)^2 + b^2 \geq 4ab + 2b.$$

4. Beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b und c folgende Ungleichungen gelten und überlege wann Gleichheit eintritt.

   (a)
   $$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad a^2 - ab + b^2 \geq 0.$$

   (b)
   $$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

   (c)
   $$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

   (d)
   $$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b)c.$$

5. Bestimme alle Paare (a, b) von reellen Zahlen, für die
   $$a^4 - 8a^2 + b^2 - 4b + 20 \leq 0$$
   gilt.

6. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise, dass von den Zahlen
   $$a - b^2, b - c^2, c - d^2 \quad \text{und} \quad d - a^2$$
   nicht alle größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

7. Beweise, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung
   $$4x - x^4 \leq 3$$
   gilt. Wann gilt Gleichheit?

8. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$. Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.