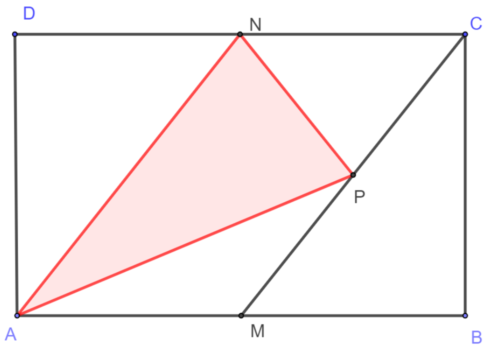
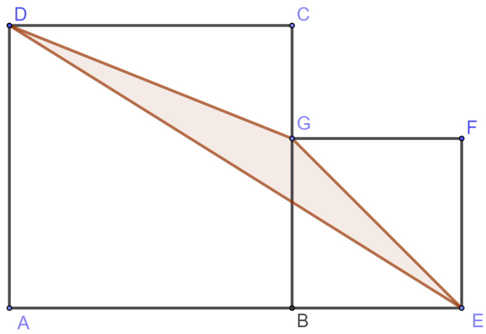
53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs 28. September 2021

1. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = 8$ und $BC = 3$. Die Punkte M und N halbieren die langen Seiten AB und CD. Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Strecke MC.

   Bestimme die Fläche des Dreiecks ANP.





2. Das Quadrat $ABCD$ und das Quadrat $BEFG$ liegen, wie in der obenstehenden Figur dargestellt ist, nebeneinander.

   Berechne die Fläche des Dreiecks DEG, wenn $BE = 12$.

3. Es sei A der Flächeninhalt, r der Inkreisradius und s der halbe Umfang eines Dreiecks ABC. Beweise:
$$r = \frac{A}{s}$$

4. Von einem konvexen Viereck $ABCD$ kennt man die Winkel $\alpha = \angle DAB = 60°$ und $\beta = \angle ABC = 40°$. Die Diagonale BD halbiert den Winkel β und die Seiten BC und CD sind gleich lang.

   Wie groß ist der Winkel $\gamma = \angle BCD$?

5. In einem Trapez $ABCD$ mit AB parallel zu CD ist die Diagonale BD genau so lang wie die Seite AD. Der Winkel $\gamma = \angle DCB = 102°$ und der Winkel $\epsilon = \angle CBD = 28°$. Wie groß ist der Winkel $\delta = \angle ADB$?

6. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$.. Auf der Seite AD liegt der Punkt E. Es gilt $\angle ABE = 18°$ und $\angle BEC = 30°$.

   Bestimme den Winkel $\angle ECD$.

7. Verlängert man die Seiten b und c eines Dreiecks über den Eckpunkt A hinaus, dann wird jeder der beiden Nebenwinkel von $\angle CBA = \alpha$ als Außenwinkel bei A bezeichnet. Analog definiert man die Außenwinkel bei B und C.

   Beweise:

   - Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.
   - Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks ergibt stets $360°$.

8. Beweise, dass die Summe der Innenwinkel Vierecks immer $360°$ beträgt! (Verallgemeinerung?)

9. Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen. (Im Unterschied zu einem allgemeinen Viereck besitzt ein Sehnenviereck also einen Umkreis.)

   Beweise, dass gegenüber liegende Innenwinkel eines Sehnenvierecks supplementär sind.

10. Beweise: Jedes Parallelogramm, in dem eine Diagonale zugleich Winkelsymmetrale ist, ist eine Raute.

11. In einem Rechteck $ABCD$ ist$M$ der Mittelpunkt der Seite AB und $AB = 2 \cdot AD$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX, derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden MD liegen.

    Bestimme den Winkel $\angle XCD$.

12. Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\angle BAD$ liegt. Man zeige, dass $\angle AMB$ ein rechter Winkel ist.

    (LWA 2007 - Stephan Wagner)