Unendlich viele Unendlichkeiten

Martin Goldstern, TU Wien

formath, 2019-12-12

Welt der Möglichkeiten

- Wer ist das?
- Mr.Spock
- Leonard Nimoy in einer Rolle
- Ein Bild von Leonard Nimoy

Welt der Möglichkeiten

- Gibt es Mr.Spock?
- Gibt es Leonard Nimoy? (1931–2015)
-
- Nein. Dennoch können wir über Eigenschaften von Mr.Spock sprechen, über seinen Lebenslauf sinnvolle Vermutungen anstellen, über unbekannte Eigenschaften argumentieren.
- Ebenso ist es in der Mathematik. Die Tatsache, dass eine **Idee** kein Objekt der realen Welt ist, hindert uns nicht, Ideen und ihre Zusammenhänge zu untersuchen.
- Alles, was man sich vorstellen kann, „gibt" es.
- Mindestbedingung: Widerspruchsfreiheit.
- Beispiel einer Idee: 3 ||| $\triangle$
- Gibt es die Zahl 3?

Mengen

- $\{5, 8, 8, 0, 1\}$ (4 Elemente), $\{58801\}$ (1 Element)
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{1,\ 1, 2,\ 1, 2, 3,\ 1, 2, 3, 4,\ \ldots\}$
- $\mathbb{Q}^+ = \{1/1,$
  $1/2, 2/1,$
  $1/3, 2/2, 3/1,$
  $1/4, 2/3, 3/2, 4/1,$
  $1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5/1,$
  $\ldots$
- $\{\mathbb{N}\}$ (1-elementig)
- $\{\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+\}$ (2-elementig)

(Die Elemente von Mengen können selbst wiederum Mengen sein!)

(Die Elemente von Mengen können selbst wiederum Mengen sein!)

Big fleas have little fleas upon their backs to bite 'em,

And little fleas have lesser fleas, and so, ad infinitum.

And the great fleas, themselves, in turn, have greater fleas to go on;

While these again have greater still, and greater still, and so on.

Teilmengen, echte Teilmengen

$\{5,8,8,0,1\} \subseteq \{0,1,5,8\} \subseteq \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Für jede Mengen M nennen wir die **Menge aller Teilmengen von** M die „Potenzmenge“ von M: $\mathcal{P}(M)$.

Zum Beispiel: Wenn $M = \{1,2,3\}$, dann hat $\mathcal{P}(M)$ 8 Elemente:

1. $\{\quad\} = \varnothing$
2. $\{1\quad\}$
3. $\{\ 2\ \}$
4. $\{\quad 3\}$
5. $\{\ \ 2,3\}$
6. $\{1,\ \ 3\}$
7. $\{1,2\ \ \}$
8. $\{1,2,3\}$

„Größe“ = „Kardinalität“ von Mengen

$|\{\mathbb{N}\}| = |\{58801\}| < |\{5,8,8,0,1\}| = \{1,2,3,4\}| < |\mathbb{N}|$.

Bijektionen; gleiche Mächtigkeit

Definition: Die Mengen A und B lassen sich „verheiraten“ (Fachvokabel: es gibt eine Bijektion),
wenn es eine Zuordnung zwischen den Elementen von A und von B gibt (eine „Funktion“ von A nach B),
sodass jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet wird,
und dabei jedes Element von B genau einmal getroffen wird.

Wir schreiben dann $A \approx B$ oder $|A| = |B|$.

„A und B haben die gleiche Mächtigkeit“. (Obwohl wir „Mächtigkeit“ noch gar nicht definiert haben.)

Verheiraten: endliche Mengen

SATZ: Wenn A und B endliche Mengen sind, dann tritt **nur** einer der folgenden Fälle auf:

1. A und B lassen sich verheiraten.
   (dann sind A und B gleich groß)
2. A lässt sich mit einer echten Teilmenge von B verheiraten.
   (Dann enthält A weniger Elemente als B)
3. Umgekehrt: B lässt sich mit einer echten Teilmenge von A verheiraten.

ACHTUNG! Das gilt nicht für unendliche Mengen.

LEMMA: Wenn $A \approx B$, und $B \approx C$, dann auch $A \approx C$.

Paradoxien des Unendlichen

Die Menge $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ der geraden positiven natürlichen Zahlen lässt sich mit der Menge $\{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ verheiraten.

(Hier sollen die g_n beliebige aber jeweils verschiedene Objekte sein. Zum Beispiel könnte g_1 der Satz „Meine Lieblingszahl ist die erste gerade Zahl (also 2)“ sein, und ähnlich auch die weiteren g_n.)

Aber die Menge $\{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ lässt sich offensichtlich mit $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ verheiraten.

Dann können wir aber $\{1, 2, 3, \dots\}$ mit der echten Teilmenge $\{2, 4, 6, \dots\}$ verheiraten.

Das Ganze ist „gleich groß“ wie sein Teil.

(„Hilberts Hotel“)

MÄCHTIGKEIT

Wiederholung der Definition. Sei A eine Menge, und sei B eine Menge. (Interessanter für $A \neq B$, aber auch $A = B$ ist hier erlaubt.)

Wir sagen

- A und B sind gleichmächtig
- (oder äquivalent, andere Notation:) $A \approx B$
- (wieder andere Notation:) $|A| = |B|$

genau dann, wenn sich A und B verheiraten lassen.

Weiters sagen wir, dass A mindestens so mächtig wie B ist, wenn es eine Teilmenge $A' \subseteq A$ gibt, die sich mit B verheiraten lässt. Wir schreiben $|A| \geqslant |B|$.

Wir schreiben $|A| > |B|$, wenn zwar $|A| \geqslant |B$ aber nicht $|A| = |B|$ gilt.

Paradox?

Aus linguistischer Sicht ist zuerst die $<$-Relation („kleiner") da, und eine Variante davon ist $\leqslant$ („kleiner-oder-gleich", „kleinergleich")

Bei unserer Definition ist aber $\leqslant$ der Grundbegriff, $<$ ist davon abgeleitet.

WIEDERHOLUNG: A ist mindestens so mächtig wie B, ($|A| \geqslant |B|$) wenn es eine Teilmenge $A' \subseteq A$ gibt (echte oder unechte), die sich mit B verheiraten lässt.

Die Tatsache, dass es eine **echte** Teilmenge $A' \subsetneq A$ gibt, die sich mit B verheiraten lässt, genügt nicht, um zu zeigen, dass $|A| > |B|$ ist.

SATZ VON CANTOR:

1. Die folgenden Mengen sind gleichmächtig (lassen sich alle miteinander verheiraten):

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{Q} \approx P_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) \approx \cdots$$

   und viele mehr. (Mit $P_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ bezeichnen wir die Menge aller **endlichen** Teilmengen von $\mathbb{N}$.)

2. Die Mengen $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) und $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen, mit Nachkommastellen) sind **nicht gleichmächtig**:

$$\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$$

   Es gibt also verschiedene Unendlichkeiten.

Wir lernen hebräisch

Was bedeutet die Zahl 3?

$$3 = \begin{cases} \text{Das, was alle Mengen } A \text{ mit } A \approx \{0,1,2\} \text{ gemeinsam haben} \\ \text{Die Menge } \{0,1,2\} \text{ selbst.} \end{cases}$$

Ähnlich definieren wir die kleinste unendliche „Zahl“ aleph-null:

$$\aleph_0 = \begin{cases} \text{Das, was alle Mengen } A \text{ mit } A \approx \mathbb{N} \text{ gemeinsam haben} \\ \text{Die Menge } \mathbb{N} \text{ selbst.} \end{cases}$$

Statt $A \approx \mathbb{N}$ sagt man auch „A ist abzählbar“ oder „abzählbar unendlich“. Wir schreiben auch $|A| = \aleph_0$, gelesen: „die Kardinalität von A ist $\aleph_0$.“

Endlich vs unendlich

DEFINITION: Eine Menge A heißt „endlich“, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass $A \approx \{1, \dots, n\}$.

(Auch die leere Menge ist endlich.)

„Unendlich“ wird als „nicht endlich“ definiert. Diese Eigenschaft scheint also negativen Charakter zu haben.

Man kann unendliche Mengen aber auch positiv beschreiben:

SATZ: Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn sie eine Teilmenge $A' \subseteq A$ hat, die $A' \approx \mathbb{N}$ erfüllt.

Mit anderen Worten: Wenn $|A| \geqslant |\mathbb{N}|$.

Mit anderen Worten: $\mathbb{N}$ ist die „kleinste“ oder „schmächtigste“ unendliche Menge. Jede unendliche Menge ist mindestens so mächtig wie $\mathbb{N}$.

SATZ: Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn sie eine Teilmenge $A' \subseteq A$ hat, die $A' \approx \mathbb{N}$ erfüllt.

KOROLLAR: Jede Menge A ist

- entweder endlich: es gibt n mit $A \approx \{1, \ldots, n\}$
- oder abzählbar unendlich: A lässt sich mit $\mathbb{N}$ verheiraten, $A \approx \mathbb{N}$, $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
- oder überabzählbar: $|A| > \aleph_0$.

$\aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl.

Gibt es noch weitere unendliche Kardinalzahlen? Gibt es überabzählbare Mengen? Ja, z.B. $\mathbb{R}$.

Unendlich plus unendlich?

Wie findet man weitere Kardinalzahlen?

Wenn man zu einer abzählbaren Menge A ein neues Element e hinzufügt, erhält man zwar eine „größere“ Menge in dem Sinn, dass $A \cup \{e\}$ eine echte Obermenge von A ist, aber die neue Menge $A \cup \{e\}$ ist weiterhin abzählbar.

Diesen Sachverhalt kürzen wir mit $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ ab.

Achtung: Das ist nur eine symbolische Gleichung. Man kann nicht auf beiden Seiten $\aleph_0$ „subtrahieren“, um $1 = 0$ zu erhalten.

Analog erhält man

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

(Mehr dazu in „Hilberts Hotel“. Aber nicht heute.)

To infinity and beyond!

SATZ (auch von Cantor): Sei A beliebige Menge.
Dann gilt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

(Zur Erinnerung: $\mathcal{P}(A)$ = die Potenzmenge von A = die Menge aller Teilmengen von A.)

Also: A ist gleichmächtig mit einer Teilmenge seiner Potenzmenge, aber nicht gleichmächtig mit der gesamten Potenzmenge.

Das ist eine Verallgemeinerung des vorigen Satzes $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, denn $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Kardinalzahlarithmetik

SATZ: Zu jeder (unendlichen) Menge A gibt es eine echt mächtigere Menge, eine Menge mit größerer Kardinalität, eine Menge B mit $|A| < |B|$.
(Zum Beispiel $\mathcal{P}(A)$.)

Besser:
SATZ: Zu jeder (unendlichen) Menge A gibt es eine nächstgrößere Menge, also eine Menge B mit folgenden Eigenschaften:

- $|A| < |B|$
- es gibt keine Menge C mit $|A| < |C| < |B|$.

BEISPIEL: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$; $\aleph_1 =$ die nächstgrößere Kardinalität.
$\aleph_2 =$ die nächstgrößere Kardinalität nach $\aleph_1$. etc

Die unendlichen Kardinalzahlen

$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$.

Wir wissen auch, dass $|\mathbb{R}| > \aleph_0$.

- Ist $|\mathbb{R}| = \aleph_1$?
- Oder ist $|\mathbb{R}| \geqslant \aleph_2$?
  Dann müsste es eine Teilmenge B geben mit $\mathbb{N} \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ und $|\mathbb{N}| < |B| < |\mathbb{R}|$.
  Cantors Vermutung: So eine Menge gibt es nicht.
  Kontinuumshypothese CH — erstes Hilbertsches Problem.

Cantors CH

... so entsteht die Frage, wie sich die verschiedenen Teile einer stetigen geraden Linie, d.h. die verschiedenen in ihr denkbaren unendlichen Mannigfaltigkeiten von Punkten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verhalten.
Entkleiden wir dieses Problem seines geometrischen Gewandes und verstehen [...] unter einer linearen Mannigfaltigkeit reeller Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler, von einander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich in wie viel und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden.
Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, dass die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, dass sie gleich zwei ist.

Kontinuumshypothese CH:

- Jede Teilmenge A der reellen Zahlen ist entweder endlich, oder abzählbar (also $A \approx \mathbb{N}$), oder erfüllt $A \approx \mathbb{R}$.
- (äquivalent:) Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ist die zweite unendliche Kardinalzahl, also die kleinste überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_1$.

Gödel 1937: CH lässt sich nicht widerlegen.

Cohen 1963: CH lässt sich nicht beweisen.

Es gibt also mathematische/mengentheoretische Universen, in denen CH gilt, und solche, in denen CH nicht gilt. Aber wie groß ist $|\mathbb{R}|$ in letzteren? $\aleph_2$? $\aleph_3$?

Die Hierarchie der Unendlichkeiten

Wir kennen schon $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$. Das sind die kleinsten unendlichen Kardinalitäten.

Das sind schon unendlich viele. Noch immer abzählbar viele.

Es gibt

- eine Menge A_0 mit $|A_0| = \aleph_0$ (A_0 ist abzählbar, zum Beispiel $A = \mathbb{N}$),
- eine Menge A_1 mit $|A_1| = \aleph_1$ (A_1 ist überabzählbar, aber nur knapp),
- eine Menge A_2 mit $|A_2| = \aleph_2$, etc.

Die Kardinalität der Menge $A_0 \cup A_1 \cup \cdots$ nennen wir $\aleph_\omega$. Diese Kardinalzahl ist größere als alle Elemente der Menge $\{\aleph_0, \aleph_1, \ldots\}$.

Und dann gibt es eine nächstgrößere. Wir nennen sie $\aleph_{\omega+1}$. Und eine nächste.

What's your number?

Die kleinsten unendlichen Kardinalzahlen:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \cdots < \aleph_{\omega+\omega} < \cdots$$

Bis jetzt noch immer abzählbar viele.

Aber es gibt mehr als $\aleph_0$ viele Kardinalzahlen. Überabzählbar viele.

Auch mehr als $\aleph_1$? Ja.

Auch mehr als $\aleph_2$? Ja.

Auch mehr als $\cdots$? Ja.

— *What's your number? The amount of money that you need to just walk away from it, and live? What is your number?*

— *More.*